ENIG Année Universitaire : 2023/2024	**Devoir de Contrôle Dispositifs et Systèmes microondes 2**	Ens :M. Benzina H Durée : 01h30 Section :GCR2

Exercices:

N.B: Lorsqu'on demande d'établir une expression ou de montrer quelque chose, les résultats « parachutés », même s'ils sont corrects, seront considérés comme faux.

I) 1)a)D'où provient le potentiel vecteur $\vec{A}$. Comment?
b)Est-ce qu'il est unique. Justifier.
2)a)Etablir l'expression :

$$\vec{E}(M) = -\vec{grad}\,V(M) - j\omega\vec{A}(M)$$

b)Est-ce que V est unique?

II) 1)a)Définir le diagramme de rayonnement plan-E
b)Définir le diagramme de rayonnement plan-H
2)Tracer ces deux diagrammes pour :
a)une antenne isotrope.
b)un dipôle infinitésimal.

III) Une onde électromagnétique a un champ (en notation réelle) qui s'écrit comme suit :

$$\vec{E}(M,t) = E_1(M)\cos(\omega t)\vec{\imath} + E_2(M)\cos(\omega t + \delta)\vec{\jmath}$$

Discuter les différents cas possibles de polarisations suivant les valeurs des paramètres ci-dessus.

IV) Soit une antenne dont le champ normalisé est donné par :

$$F(\theta)=\begin{cases} 0 & pour \quad 0 \le \theta \le 20° \\ 0{,}707 & pour \quad 20°\langle\theta \le 60° \\ 0 & pour \quad 60°\langle\theta \le 120° \\ 0{,}707 & pour \quad 120°\langle\theta \le 150° \\ 1 & pour \quad 150°\langle\theta \le 180° \end{cases}$$

Sachant que les résistances de rayonnement et de dissipation ont pour valeurs respectives 0.5Ω et 0.002Ω:

1°)Déterminer l'angle solide de l'ouverture de l'antenne Ω_A.
2°)Déterminer la directivité de cette antenne.
3°)Déterminer le gain de cette antenne.

V) Soit un dipôle vertical (disposé symétriquement /O, suivant Oz) de longueur $\ell = \frac{\lambda}{2}$, et parcouru par un courant I(z) (voir formulaire).

1°) a)Donner , en un point M quelconque, l'expression de départ du potentiel vecteur $\vec{A}(M)$.

Dans la suite on supposera le point M appartenant à la région de champ lointain.

b)A cause de la symétrie cylindrique, on suppose φ=0□; développer l'expression précédente de $\vec{A}(M)$, en négligeant les variations des termes d'amplitude mais pas celles de phase. Calculer l'intégrale en vous aidant de la formule fournie dans le formulaire.

2°)Obtenir les expressions des champs électrique et magnétique en tout point M..

3°) Déduire l'expression du champ normalisé F(θ).

BON TRAVAIL

ENIG-GCR-BENZINA H

FORMULAIRE DU MODULE DISPOSITIFS ET SYSTEMES MICROONDES 2

Equations de Maxwell en régime harmonique :

$\vec{rot}\,\vec{E} = -j\omega\vec{B}$; $\vec{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D}$; $div\,\vec{D} = \rho$;

$div\,\vec{B} = 0$

Relations constitutives :

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ $\quad$ $\vec{B} = \mu\vec{H}$ $\quad$ $\vec{J} = \sigma\vec{E}$

Vecteur de Poynting complexe:

$\vec{\Pi} = \frac{1}{2}\left(\vec{E} x \vec{H}^*\right)$;

Puissance rayonnée moyenne :

$P = Re(\oiint \vec{\Pi}.\vec{dS})$;

Potentiels :

$div\,\vec{A} + j\omega\varepsilon\mu V = 0 (jauge\ de\ Lorentz)$

Equation d'Helmholtz et sa solution :

$\Delta\vec{A} + \beta^2\vec{A} = -\mu\vec{J}$; $\quad avec \quad \beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon$;

$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}e^{-J\beta R}}{R} d\tau_P \leftrightarrow \frac{\mu}{4\pi}\int_{source} \frac{I e^{-J\beta R}}{R}\vec{dl}_P$

$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 120\pi$ (en espace libre)

Dipôle de dimension finie :

$\vec{H} = j\beta\frac{sin\theta}{\mu}.A_z\vec{u}_\phi$; $\vec{E} = -j\omega A_\theta\vec{u}_\theta$

Limite de la région de champ proche :

$r = \frac{2D^2}{\lambda}$

Cas général (champ lointain)

$\vec{A} = \frac{\mu e^{-J\beta R}}{4\pi r}\iiint_V \vec{J}\, e^{j\beta\vec{u}_r.\vec{r}'} d\tau_P$; $\vec{r}' = \vec{OP}$;

$\vec{E} = -j\omega(A_\theta\vec{u}_\theta + A_\phi\vec{u}_\phi)$

$\vec{u}_r x\vec{E} = \zeta\vec{H}$; $\vec{\Pi} = \frac{1}{2\zeta}\left|\vec{E}\right|^2\vec{u_r}$

Champ normalisé : $F(\theta,\phi) = \frac{E}{E_{max}}$

Puissance normalisée :

$\mathcal{P}(\theta,\phi) = |F(\theta,\phi)|^2$

Intensité de rayonnement :

$U(\theta,\phi) = \Pi_r r^2$; $U_{moy} = \frac{P}{4\pi}$

Directivité :

$D(\theta,\phi) = \frac{U(\theta,\phi)}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}|F(\theta,\phi)|^2$;

$\Omega_A = \int|F(\theta,\phi)|^2 d\Omega$,

$D = \frac{U_{max}}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}$

Gain :

$G(\theta,\varphi) = \frac{4\pi U(\theta,\varphi)}{P_e}$; $G = \frac{4\pi U_{max}}{P_e}$

Efficacité du rayonnement : $e_r = \frac{P}{P_e}$

Dipôle court :

$I(z) = I_A\left[1 - \frac{2|z|}{\Delta z}\right] pour \quad |z| \le \frac{\Delta z}{2}$; 0 ailleurs

Dipôle demi-onde :

$I(z) = I_m sin\left[\beta(\frac{\lambda}{4} - |z|)\right] pour \quad |z| \le \frac{\lambda}{4}$

Impédance d'antenne : $Z_A = R_r + R_d + jX_A$;

Résistance de rayonnement : $R_r = \frac{2P}{|I|^2}$

Dipôle idéal : $R_r = 80.\pi^2.(\Delta z/\lambda)^2$

Dipôle court : $R_r = 20.\pi^2.(\Delta z/\lambda)^2$

Résistance de dissipation : R_d

Epaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$; $R_S = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$;

Conducteur cylindrique

Dipôle idéal : $R_d = \frac{l}{2\pi a}R_S$

Dipôle court : $R_d = \frac{1}{3}\frac{l}{2\pi a}R_S$

$P_e = P + P_d$; $R_A = R_r + R_d$; $R_A = \frac{2P}{|I|^2}$

Monopole :

R_r(Monopole) = $\frac{1}{2}R_r$(Dipole) ; D(Monopole) = $\frac{1}{2}D$(Dipole)

Z_e(Monopole) = $\frac{1}{2}Z_e$(Dipole)

dipôle magnétique -spire circulaire :

inductance :

$L = \mu b\left[Log\left(\frac{8b}{a}\right) - 1{,}75\right] pour\ a << b$

b :rayon de la spire ; a : rayon du fil

$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$F/m

$$\int sin(a+bx)\, exp(cx)dx = \frac{exp(cx)}{b^2+c^2}[c\, sin(a+bx) - b\, cos(a+bx)]$$

ENIG-GCR-BENINA H

Corrigé TD C Disp Sys rayonnés 2 2023/2024 (1)

I) 1°a) A cause de $\vec{B}$, $\vec{B}(M) = \vec{rot}\,\vec{A}(M)$ car $div\,\vec{B}(M) = 0$

-1- on sait que $div[\vec{rot}(\vec{X})] = 0$ donc $\exists \vec{A}(M)$ tq $\vec{B}(M) = \vec{rot}(\vec{A}(M))$

b) $\vec{A}$ n'est pas unique supposons $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{grad}\,f$

alors $\vec{rot}\,\vec{A}' = \vec{rot}\,\vec{A} + \vec{rot}(\vec{grad}(f)) = \vec{rot}\,\vec{A}(M)$ car

$\vec{rot}(\vec{grad}\,f) = 0$ à une cte de f donc $\vec{A}(M)$ n'est pas unique.

2°a) on a $\vec{rot}\,\vec{E}(M) = -j\omega\mu \underbrace{\vec{H}(M)}_{\vec{B}(M)}$

en remplaçant $\vec{B}(M)$ par $\vec{rot}\,\vec{A}(M)$ on a $\vec{rot}\,\vec{E}(M) = -j\omega\,\vec{rot}\,\vec{A}(M)$

et $\vec{rot}\left(\vec{E}(M) + j\omega\,\vec{A}(M)\right) = 0$ car $\vec{rot}(\vec{a} + \lambda\vec{b}) = \vec{rot}\,\vec{a} + \lambda\,\vec{rot}\,\vec{b}$

d'où $\exists V$ tq $\vec{E}(M) + j\omega\,\vec{A}(M) = -\vec{grad}\,V(M)$

(ou donc) car $\vec{rot}(\vec{grad}(\beta)) = 0$ donc $\vec{E}(M) = -\vec{grad}\,V(M) - j\omega\vec{A}(M)$

b) $V(M)$ n'est pas unique.

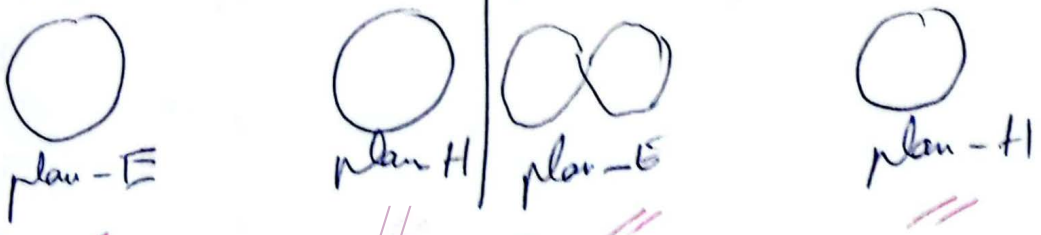
Sup supp : (non demandé) supposons $V' = V + C$ ou C = cte

alors $\vec{grad}\,V' = \vec{grad}\,V$ donc $\exists$ une ∞^{te} de V possibles

II) 1°a) Un diagramme de rayonnement plan-E est celui qui contient le champ $\vec{E}$ et la direction du maximum de rayonnement.

b) Un diagramme de rayonnement plan-H est celui qui contient le champ $\vec{H}$ et la direction du maximum de rayonnement.

2°a) Antenne isotrope | b) dipôle infinitésimal



ENG-CORBENIN-H

III) * si $\delta = 0$ / la polarisation est rectiligne

si en plus $E_1 = 0$ alors on a une polarisation verticale ou V

sinon si $E_2 = 0$ ——— horizontale ou H

* si $\delta \neq 0$

si $\delta > 0$ / la polarisation est gauche

si $\delta < 0$ / ——— est droite

si $E_1 = E_2$ et $\begin{cases} \delta = \frac{\pi}{2} \\ \delta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ polarisation circulaire gauche ou RHCP ——— droite ou RHCP

sinon la polarisation est elliptique gauche ou droite.

16 pt.

IV) 1) $\Omega_A = \iint_{\text{Horpace}} |F(\theta)|^2 d\Omega = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} |F(\theta)|^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\int_{20°}^{60°} (0{,}707)^2 \sin\theta \, d\theta + \int_{120°}^{150°} (0{,}707)^2 \sin\theta \, d\theta + \int_{150°}^{180°} \sin\theta \, d\theta \right]$

$= 2\pi \left[(0{,}707)^2 \left[-\cos\theta \right]_{20°}^{60°} + (0{,}707)^2 \left[-\cos\theta \right]_{120°}^{150°} + \left[-\cos\theta \right]_{150°}^{180°} \right]$

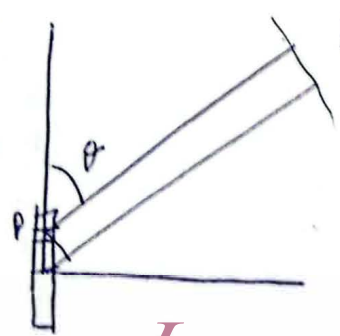
$= 3{,}372$ Sr

2) $D = \frac{4\pi}{\Omega_A} = 3{,}726$

3) $G_T = \text{er } D$; $\text{er} = \frac{R_r}{R_r + R_\Omega} = \frac{0{,}5}{0{,}5 + 0{,}002} = 0{,}996$

$G_T = 3{,}712$

IV)



I

$r_Z = \vec{PH} = \|\vec{PH}\| = OM \cdot \overrightarrow{OP} \cos\theta$

$R_1 \simeq r - z_p \cos\theta$

$\vec{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\text{dipole}} \frac{I(z_p) \, e^{-j\beta R}}{R} dz_p \vec{k}$

ENIG GCR-BENZINA H

$$A(M) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{+\frac{\ell}{2}} \frac{I_0 \sin\left[\beta\left(\frac{\lambda}{4} - |z_p|\right)\right] e^{-j\beta(r - z_p \cos\theta)}}{r} dz_p \vec{k}$$

$$= \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{+\frac{\lambda}{4}} \sin\left[\beta\left(\frac{\lambda}{4} - |z_p|\right)\right] e^{j\beta z_p \cos\theta} dz_p \vec{k}$$

$$\text{II} = \text{II}_1 + \text{II}_2$$

$$\text{II}_1 = \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{0} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{4} + z_p\right)\right] e^{j\beta z_p \cos\theta} dz_p = \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{0} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z_p + \frac{\pi}{2}\right) e^{j\beta z_p \cos\theta} dz_p$$

on pose $a = \frac{\pi}{2}$, $b = \frac{2\pi}{\lambda}$; $c = j\beta\cos\theta$ ($b = \beta$)

$$\text{II}_1 = \left[\frac{\exp(j\beta z_p \cos\theta)}{\beta^2 - \beta^2\cos^2\theta}\left[j\beta\cos\theta \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z_p + \frac{\pi}{2}\right) - \beta\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z_p + \frac{\pi}{2}\right)\right]\right]_{-\frac{\lambda}{4}}^{0}$$

$$= \left[\frac{1}{\beta^2\sin^2\theta}\left(j\beta\cos\theta - \beta\times 0\right) - \frac{\exp\left(-j\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\beta^2\sin^2\theta}\left(j\beta\cos\theta\times 0 - \beta\right)\right]$$

$$\text{II}_1 = \frac{1}{\beta^2\sin^2\theta}\left[j\beta\cos\theta + \beta\exp\left(-j\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right]$$

$$\text{II}_2 = \int_{0}^{+\frac{\lambda}{4}} \sin\left[\frac{\pi}{2} - \beta z_p\right) e^{j\beta z_p \cos\theta} dz_p, \text{ on pose } a = \frac{\pi}{2}\ ; b = -\beta\ ; c = j\beta\cos\theta$$

$$\text{II}_2 = \left[\frac{\exp(j\beta z_p\cos\theta)}{\beta^2 - \beta^2\cos^2\theta}\left[j\beta\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta z_p\right) + \beta\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta z_p\right)\right]\right]_{0}^{\frac{\lambda}{4}}$$

$$= \frac{\exp\left(j\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\beta^2\sin^2\theta}\left[j\beta\cos\theta\times 0 + \beta\right] - \frac{1}{\beta^2\sin^2\theta}\left[j\beta\cos\theta + \beta\times 0\right]$$

$$= \frac{1}{\beta^2\sin^2\theta}\left[\beta\exp\left(j\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) - j\beta\cos\theta\right]$$

$$\text{II} = \frac{1}{\beta^2\sin^2\theta}\left[2\beta\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right] = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\beta\sin^2\theta}$$

ENIG CR BENZINA H

finalement : $\vec{A}(M) = C \text{ II } \vec{k} = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \frac{2\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\beta \sin^2\theta} \vec{k}$

2) $\vec{E} \simeq -j\omega A_\theta \vec{u_\theta} \text{ ou } -j\omega A_\varphi \vec{u_\varphi}$; $\vec{k} = \cos\theta \vec{u_r} - \sin\theta \vec{u_\theta}$

$\Rightarrow \vec{E} = (-) j\omega\mu \frac{I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \frac{2\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\beta \sin^2\theta} (-)\sin\theta \vec{u_\theta}$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{j\omega\mu I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\beta \sin\theta} \vec{u_\theta}}$$

$\vec{H}(M) = \frac{\vec{u_r} \wedge \vec{E}}{\eta}$; $\vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta} = \vec{u_\varphi}$, $\frac{\omega\mu}{\eta} = \beta \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{H}(M) = j \frac{I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta} \vec{u_\varphi}}$$

3) champ normalisé

$F(\theta) = \frac{E_\theta}{E_{\theta_{max}}}$; $E_{\theta_{max}} = E_\theta(\theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{j\omega\mu I_0 e^{-j\beta r}}{\beta 2\pi r}$

$\Rightarrow F(\theta) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}$

3 pts

/7 pts

EMI-GGR-BENZINA H

ENIG

GCR2

A.U 2023-2024 ; Durée : 2H00

Enseignant responsable : Mr BENZINA.H

Documents non autorisés.

DS DISPOSITIFS ET SYSTEMES MICROONDES 2

N.B :L'usage de la calculatrice standard est autorisé.L'usage de GSM ou objet connecté est strictement interdit.

Hypothèse générale : On travaille en régime temporel sinusoidal.

EXERCICES

I) Pour un dipôle infinitésimal (idéal),

1°) écrire en un point M, les expressions du potentiel vecteur $\vec{A}$ (M).

2°)Déduire à partir de $\vec{A}$ (M) l'expression du champ $\vec{H}$ (M)

3°)Simplifier cette expression dans la région du champ lointain.

II) Une antenne consistant en une tige métallique de longueur ℓ supposée infiniment mince est posée verticalement le long de l'axe Oz. Elle est alimentée par un courant :

$I(z,t) = I_o \exp(j\omega t)\vec{k}$ pour $-\ell/2 \leq z \leq \ell/2$ avec I_o une constante.

1°)Obtenir l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}$ (M) où M est dans la RCL .

2°)Déduire :

a) l'expression du champ $\vec{E}$(M)

b) l'expression du champ $\vec{H}$ (M)

c) l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$

III)A) Soit une spire circulaire de petite dimension de longueur (périmètre) moyen $\ell = 0{,}15\lambda$ et rayon de section du fil a=0,001 λ ; sachant que la conductivité σ est égale à $3{,}5.10^7$ S/m et la fréquence f=100MHz, calculer pour cette antenne:

1°)La résistance du rayonnement R_r

2°)La réactance X_A

3°)La résistance Ohmique.R_d

4°)L'impédance d'entrée.

5°)L'efficacité du rayonnement e_r.

B)On coupe cette spire puis on la redresse de telle manière qu'elle devient un dipôle électrique ($\Delta z = \ell$) qu'on supposera comme court. En gardant les mêmes données, calculer :

1°)La résistance du rayonnement R_r

2°)La résistance Ohmique.R_d

3°)L'efficacité du rayonnement e_r.

IV) Pour un dipôle idéal, dans la RCL, montrer que la surface équivalente maximale de réception est égale à 0,119 λ^2. ($V = E_i \Delta z$)

V)Soit un réseau linéaire disposé le long de l'axe Oz et constitué de 4 dipôles infinitésimaux équidistants (d=λ/2), parallèles à l'axe Ox et uniformément excités, tels que α=5π/4.

1°) Trouver l'expression du champ normalisé.

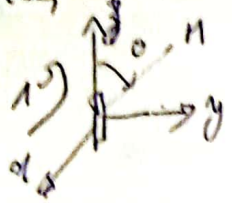
2°)Tracer, dans la feuille jointe, en polaires, le diagramme du facteur de réseau normalisé..

Bon travail

ENIG-GCR-BENZINA H

Corrigé DS Dip Sys mondes 2 2023-2024

Exercice I)



1°) $\vec{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{dipôle} \frac{I(P)\, e^{-j\beta R}}{R} d\vec{l}_P$ (1)

on prend $R \simeq r$ pour les termes de phase

$R \simeq r$ pour les termes d'amplitude

$I(P) = I_0$ et $d\vec{l}_P = dz_P \vec{k}$

Ainsi on aura:

$$\vec{A}(M) \simeq \frac{\mu}{4\pi} \int_{dipôle} \frac{I_0 e^{-j\beta r}}{r} dz_P \vec{k} = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{+\frac{\Delta z}{2}} dz_P \vec{k}$$

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \Delta z \vec{k} \quad (*) \; //$$

(ici on a demandé juste d'écrire et non d'établir dans ce cas il suffit d'écrire l'expression (*) pour avoir la totalité de la note pour cette question)

2°) obtention de $\vec{H}(M)$ à partir de $\vec{A}(M)$:

$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{rot}\, \vec{A}(M)$ (1) ; $\vec{rot}\, \vec{A}(M) = \vec{rot}\, (A(M)\vec{k})$

$\vec{rot}\, \vec{A}(M) = \vec{grad}\, A(M) \wedge \vec{k} + A(M)\, \vec{rot}\, \vec{k}$ (1)

or $\vec{rot}\, \vec{k} = \vec{0}$ car $\vec{k}$ est un vecteur fixe. (1)

donc $\vec{rot}\, \vec{A}(M) = \vec{grad} \left(\frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \Delta z \right) \wedge \vec{k}$?

$$= \frac{\mu I_0 \Delta z}{4\pi} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-j\beta r}}{r} \right) \vec{u}_r \wedge \vec{k}$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-j\beta r}}{r} \right) = -j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} - \frac{1}{r^2} e^{-j\beta r} = -\frac{e^{-j\beta r}}{r^2} (1 + j\beta r) \; //$$

$\vec{u}_r \wedge \vec{k}$? on a $\vec{k} = \cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta$ (1)

$\vec{u}_r \wedge \vec{k} = \vec{u}_r \wedge (\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta) = -\sin\theta \vec{u}_\phi$ (1)

finalement $\vec{H}(M) = \frac{\mu I_0 \Delta z}{\mu 4\pi r^2} e^{-j\beta r} (1 + j\beta r) \sin\theta \vec{u}_\phi$ (1)

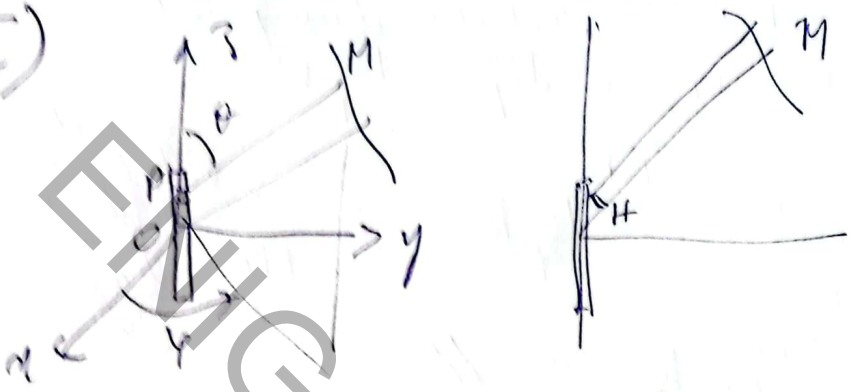
ENIG CR BENZINA H

3ème Dans la région de champ lointain (KCL)

on $\beta r \gg 1$ (1) $(r \gg \lambda)$ dans ce cas

on aura $\vec{H}(M) \simeq j\beta \frac{I_0 \Delta z}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \, \vec{u}_\varphi$ (1) (1) 1,5pts

II)



Dans n'importe quel plan $\varphi = cte$ (symétrie)

on $R = PM \simeq \beta r - \overline{OH}$; $\overline{OH} = \overline{OP}\cos\theta = z_p \cos\theta$

donc $R \simeq r - z_p \cos\theta$ (1) ceci pour les termes de phase

pour le terme d'amplitude, on prend, $R \simeq r$ (1)

et donc $\vec{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{dyole} \frac{I(P) e^{-j\beta R}}{R} d\vec{l}_p \simeq \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{I(P) e^{-j\beta r + j\beta z_p \cos\theta}}{r} d\vec{l}_p$ (1)

$I(P) = I_0$ et $d\vec{l}_p = dz_p \vec{k}$

donc $\vec{A}(M) \simeq \frac{\mu}{4\pi} \int_{dyole} \frac{I_0 e^{-j\beta r} e^{j\beta z_p \cos\theta}}{r} dz_p \vec{k}$

$\vec{A}(M) \simeq \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} e^{+j\beta z_p \cos\theta} dz_p \vec{k}$ (1)

$= \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \frac{1}{j\beta\cos\theta} \left[e^{j\beta z_p \cos\theta} \right]_{-\frac{l}{2}}^{+l/2} \vec{k}$

ENIG-GCR-BEKKINA H

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r j\beta \cos\theta}\left[e^{+j\beta\frac{l}{2}\cos\theta} - e^{-j\beta\frac{l}{2}\cos\theta}\right]\vec{k}$$ (3)

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r\beta\cos\theta}\underbrace{\sin\left[\frac{\beta l}{2}\cos\theta\right]}_{A_z}\vec{k}$$ (//)

2°) a) Dans la RCL $\vec{E} \simeq -j\omega A_\theta\vec{u}_\theta - j\omega A_\varphi\vec{u}_\varphi$ (/)

on a $\vec{k} = \cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta$

et donc $\vec{A} = A_r\vec{u}_r + A_\theta\vec{u}_\theta = A_z\cos\theta\vec{u}_r - A_z\sin\theta\vec{u}_\theta$

$\vec{E} \simeq -j\omega A_\theta\vec{u}_\theta \simeq j\omega A_z\sin\theta\vec{u}_\theta$

$$\vec{E} \simeq \frac{j\omega\mu I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r\beta}\operatorname{tg}\theta\sin\left[\frac{\beta l}{2}\cos\theta\right]\vec{u}_\theta \quad ; \quad \frac{\omega\mu}{\beta} = \eta$$ (//)

b) $\vec{H}(M) \simeq \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{\eta}$ dans la RCL (/)

$$\vec{H}(M) \simeq \frac{j\omega\mu}{\eta}\cdot\frac{I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r\beta}\operatorname{tg}\theta\sin\left[\frac{\beta l}{2}\cos\theta\right]\vec{u}_\varphi$$

or $\frac{\omega\mu}{\eta} = \beta$ et donc $\vec{H}(M) \simeq j\frac{I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r}\operatorname{tg}\theta\sin\left[\frac{\beta l}{2}\cos\theta\right]\vec{u}_\varphi$ (//)

c) $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{H}^{(*)}}{2}$ ou $\vec{\Pi} = \frac{|E|^2}{2\eta}\vec{u}_r$ (/)

$$\vec{\Pi} = \frac{\eta^2|I_0|^2}{2(2\pi r)^2\eta}\operatorname{tg}^2\theta\sin^2\left[\frac{\beta l}{2}\cos\theta\right]\vec{u}_r$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\eta|I_0|^2}{8\pi^2 r^2}\operatorname{tg}^2\theta\sin^2\left[\frac{\beta l}{2}\cos\theta\right]\vec{u}_r$$ (//)

16 pts

ENIG GCR BENZIWATH

III

1°) $R^r = 31200 \left(\frac{S}{\lambda^2}\right)^2$; $S = \pi b^2$; $b = \frac{\ell}{2\pi}$ (1)

$$R^r = 31200 \left(\frac{\pi \frac{\ell^2}{4\pi^2}}{\lambda^2}\right)^2 = 31200 \left(\frac{(0,15)^2 \lambda^2}{4\pi \lambda^2}\right)^2 = 31200 \left(\frac{(0,15)^2}{4\pi}\right)^2$$ (1)

A.N : $R^r = 0,100023\ \Omega$ (II)

2°) $X_A = \omega L_i = \omega \mu b \left[\log\left(\frac{8b}{a}\right) - 1,75\right]$ (1)

$= \omega \mu \frac{\ell}{2\pi} \left[\log\left(\frac{8\ell}{2\pi a}\right) - 1,75\right]$ (1)

$= \frac{2\pi c}{\lambda} \mu\, 0,15\lambda \left[\log\left(\frac{8 \times 0,15\lambda}{2\pi \times 0,001\lambda}\right) - 1,75\right]$

$\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m et $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

A.N $X_A = 1244,35\ \Omega$ (II)

3°) $R_d = R_s \frac{\ell}{2\pi a} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \frac{\ell}{2\pi a}$ (1)

$= \sqrt{\frac{2\pi \times 100\,10^6 \times 4\pi 10^{-7}}{2 \times 3,5\,10^7}} \times \frac{0,15\lambda}{2\pi \times 0,001\lambda}$

A.N $R_d = 0,08018\ \Omega$ (II)

4°) $Z_A = (R^r + R_d) + j X_A$ (1)

A.N $Z_A = (0,1802 + j\,1244)\ \Omega$ (1)

5°) $e_r = \frac{R^r}{R^r + R_d} = 0,555$ (1) (1)

ENIG-GCR-BENZINA H

III) B) 1) $R_r = 20\pi^2 \left(\frac{\Delta Z}{\lambda}\right)^2 = 20\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$ (1)

$= 20\pi^2 \left(\frac{0,15\lambda}{\lambda}\right)^2$; A.N $R_r = 4,441\ \Omega$ (1)

2) $R_d = \frac{1}{3} R_s \frac{l}{2\pi a}$ (1) $= \frac{R_d}{3}$ spire $= 0,026736\ \Omega$ (1)

3) $\sigma_r = \frac{R^r}{R^r + R_d}$ (1) $= 0,994$ (1)

ENG-GCR-BENZINA H

ENIG-GCR-BENZINA H

(6)

IV $A_{emax} = \frac{P_{max}}{|\vec{\Pi}|} = \frac{\frac{1}{8}\frac{|V|^2}{\eta}}{\frac{|E|^2}{2\eta}} = \frac{80\pi^2\left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2}{\frac{|V|^2}{640\pi^2\left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2}} = \frac{640\pi^2\left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2}{2\eta(\Delta z)^2}$ (1) (1) (III) (1)

$A_{emax} = \frac{2\eta\lambda^2}{640\pi^2}$ (1) → or $\eta = 120\pi$

$\Rightarrow A_{emax} = \frac{240\pi\lambda^2}{640\pi^2} = \frac{3}{8\pi}\lambda^2 = 0,119\lambda^2$ (1)

V) $N=4$; $d=\frac{\lambda}{2}$ et $\alpha = \frac{5\pi}{4}$

$\psi = \beta d\cos\theta + \alpha = \frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{\lambda}{2}\cos\theta + 5\frac{\pi}{4}$ (1)

$\psi = \pi\left(\cos\theta + \frac{5}{4}\right)$ (II)

$E_n = FR_n \times F(\theta)$ (1) ; $FR_n = \frac{\sin N\frac{\psi}{2}}{N\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}$ (1)

$FR_n = \frac{\sin\left[2\pi\left(\cos\theta+\frac{5}{4}\right)\right]}{4\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\cos\theta+\frac{5}{4}\right)\right]}$ (II)

$F(\gamma) = \sin\gamma$ (1), $\cos\gamma = \vec{u_r}\cdot\vec{x}$ (1)

	u_θ	u_φ	$\vec{\Pi}$
$\vec{x}$	$\cos\theta$	$-\sin\varphi$	0
$\vec{y}$	$\sin\theta$	$\cos\varphi$	0
$\vec{z}$	0	0	1

	u_r	u_θ	u_φ
$\vec{x}$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	0
u_θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	0
u_φ	0	0	1

$\vec{u_r} = \cos\theta\vec{z} + \sin\theta\vec{u_\theta}$

$= \cos\theta\vec{z} + \sin\theta\cos\varphi\vec{x} + \sin\theta\sin\varphi$

$\vec{u_r}\cdot\vec{x} = \sin\theta\cos\varphi$ (II)

$\Rightarrow \cos\gamma = \sin\theta\cos\varphi$

$\Rightarrow \sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\varphi}$ (1)

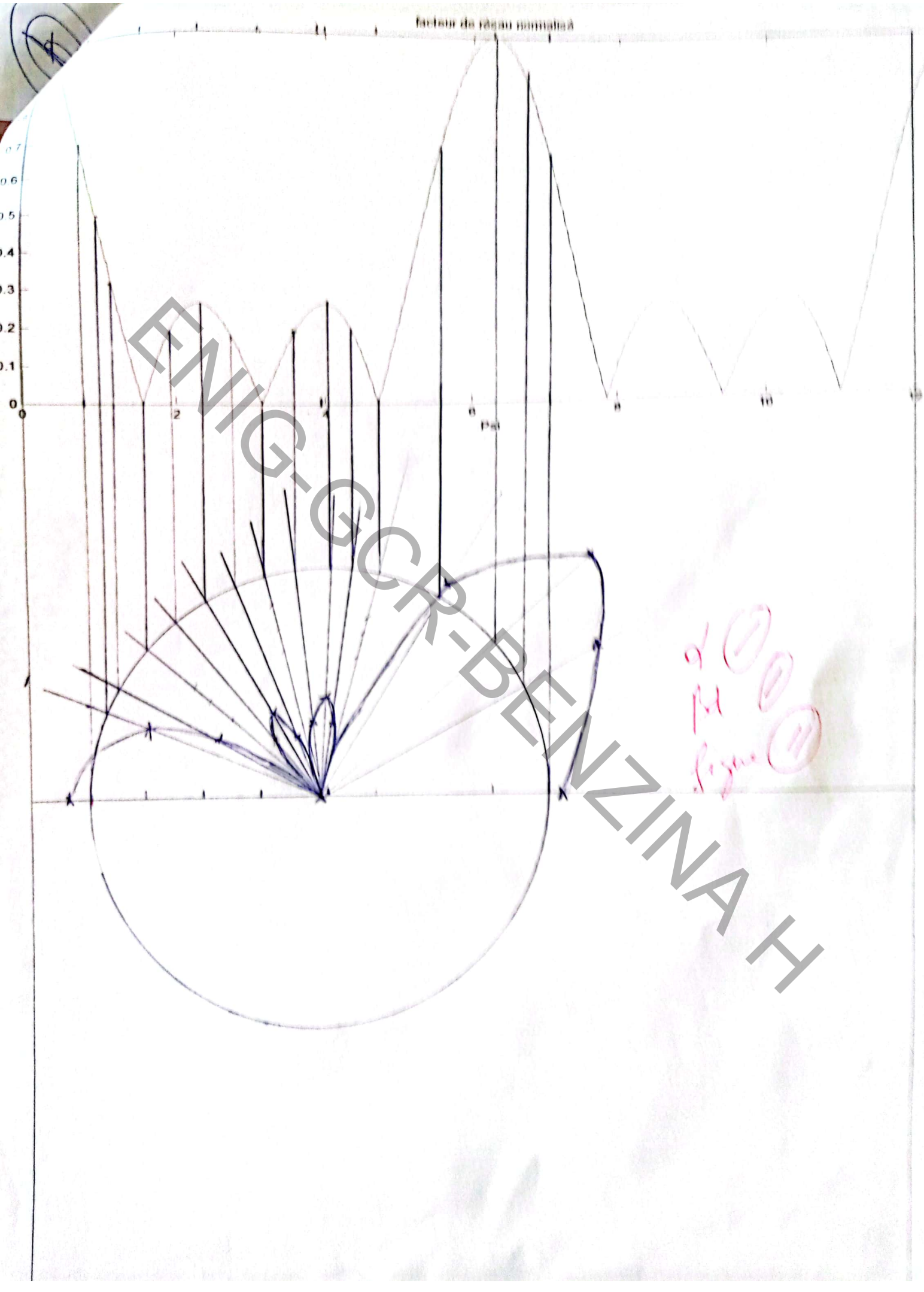
d'où

$$E_n = \frac{\sin\left[2\pi\left(\cos\theta + \frac{5}{4}\right)\right]}{4\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\cos\theta + \frac{5}{4}\right)\right]} \cdot \sqrt{1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi}$$

(1)

2°) Tracage de la courbe voir feuille.

ENIG-GCR-BEVENAH



ENIG-GCR-BENZINA H